Лекция 6 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Цель лекции:

Сформировать у студентов понимание структуры линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, научить решать такие уравнения различными методами, включая характеристическое уравнение и метод вариации постоянных.

Основные вопросы:

1. **Линейные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.**
2. **Характеристическое уравнение и его корни.**
3. **Случаи решения: два корня, кратный корень, комплексные корни.**
4. **Неоднородное уравнение и метод вариации постоянных.**
5. **Определение фундаментальной системы решений.**

Дифференциальное уравнение второго порядка называется линейным, если оно имеет следующий вид

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

где $a_1(x),\ a_2(x),\ f(x)$ - заданные, непрерывные функции.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

и установим некоторые свойства его решений.

Теорема. Если функции $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ являются частными решениями уравнения (1), то решением этого уравнения является также функция

$$y=C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) \qquad (2)$$

где с 1 и с2 - произвольные постоянные.

Полученные результаты можно распространить на линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка, имеющие вид

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ \ldots + a_n(x)y = 0 \qquad (3)$$

Если функции $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x), \ldots, y_n=y_n(x)$ являются частными решениями уравнения (3), то его решением является и функция $y = C_1\, y_1+ C_2\ y_2\ +, \ldots + C_n\, y_n$.

Частным случаем рассмотренных выше линейных однородных дифференциальных уравнений являются ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Пусть дано ЛОДУ второго порядка

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \qquad (4)$$

где p и q постоянны.

Будем искать частные решения уравнения (4) в виде

$$y=e^{kx}$$

где k - некоторое число.

Уравнение

$$k^2+pk+q=0 \qquad (5)$$

называется характеристическим уравнением ДУ (4).

При решении характеристического уравнения (5) возможны следующие три случая

1. Корни k_1 и k_2 уравнения (5) действительные и различные: $k_1 \neq k_2$. В этом случае общим решением уравнения (4) являются функция
$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \qquad (6)$$
2. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (5) действительные и равные: $k_1 = k_2$. В этом случае общим решением уравнения (4) являются функция
$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} \qquad (7)$$
3. Корни k_1 и k_2 уравнения (5) комплексные: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$. Тогда общее решение уравнения (4) запишется в виде $y = C_1 e^{\alpha x} cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} sin\beta x$ или
$$y = e^{\alpha x}(C_1 e^{\alpha x} cos\beta x + C_2 sin\beta x) \qquad (8)$$

Таким образом, нахождение общего решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (4) сводится к нахождению корней характеристического уравнения (5) и использованию формул (6)-(8) общего решения уравнения (не прибегая к вычислению интегралов).

2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (10)$$

где $p,\ q$ - заданные коэффициенты, $f(x)$ непрерывная функция.

Пусть

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (11)$$

соответствующее ему однородное уравнение (ЛОДУ).

Теорема 4. Общим решением y уравнения (10) является сумма его произвольного частного $\bar{y}$ решения и общего решения $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ соответствующего однородного уравнения (11),

т. е. $$y = y_0 + \bar{y} \qquad (12)$$

Мы знаем, как найти общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения (11). Рассмотрим, как найти частное решение $\bar{y}$ -?

Частное решение $\bar{y}$ уравнения (10) можно найти, если известно общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения (11), методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Однако если функция в правой части уравнения f(x) является

1. многочленом,
2. показательной функцией,
3. тригонометрической функцией или их комбинацией,

то это частное решение $\bar{y}$ может быть найдено методом неизвестных коэффициентов.

1. Пусть правая часть уравнения представляет собой многочлен f(x)

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

Тогда решение $\bar{y}$ ищется следующим образом: $\bar{y} = Q_n(x) \cdot x^k$ (13)

Здесь $Q_n(x)$ — многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, k — число нулевых корней характеристического уравнения.

2. Пусть $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ — правая часть уравнения. Тогда решение следующее

$$\bar{y} = Q_n(x) \cdot x^k \cdot e^{\alpha x}$$

Тогда решение $\bar{y}$ ищется следующим образом: $\bar{y} = Q_n(x) \cdot x^k \cdot e^{\alpha x}$ (14)

Здесь $Q_n(x)$ — многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, k — число корней характеристического уравнения равных α.

3. Пусть $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ — правая часть уравнения, a, b, β — заданные числа.

Тогда решение $\bar{y}$ ищется следующим образом:

$$\bar{y} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^k \qquad (15)$$

Здесь A , B неизвестные коэффициенты, k — число корней характеристического уравнения равных β.

Пример 6.1. Необходимо найти общее решение дифференциального уравнения:

$$3y'' + 5y' + 2y = 0$$

Решение. Разделим уравнение на 3 и запишем его в следующем виде:

$$y'' + \frac{5}{3}y' + \frac{2}{3}y = 0$$

Определим коэфициенты ЛОДУ: $p = \frac{5}{3}, q = \frac{2}{3}$. Напишем характеристическое уравнение

$$k^2 + \frac{5}{3}k + \frac{2}{3} = 0$$

найдем корни кв.уравнения $k_1 = -1$, $k_2 = -\frac{2}{3}$ => (7) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ =>

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{2}{3}x}$$ -общее решение ДУ

Контрольные вопросы:

1. каким образзом определяется характеристическое уравнение?

2. нахождение общего решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

3. применение метода неизвестных коэффициентов для ЛНДУ.

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994

2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004

3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.

7. Шипачев В.С. Высшая математика

8. Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии.

9. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика.